1．はじめに

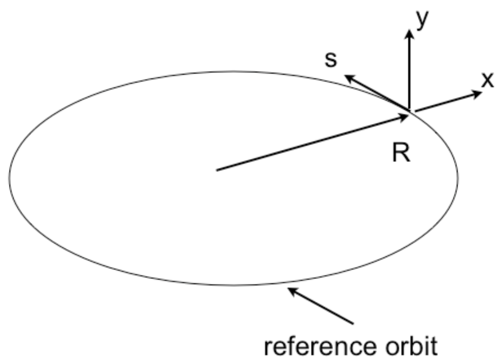
加速器を使って粒子をより高いエネルギーまで加速するには、入射器、ブースター加速器、メインシンクロトロンなどの構成で複数の加速器によって徐々に加速する必要がある。電子の場合、エネルギー10MeV程度で相対論的運動になるため、加速周波数は一定になる。陽子、イオンビームなど重い荷電粒子の加速では、そのエネルギーと共に加速高周波を同期させなければならず、陽子シンクロトロンのビーム加速は技術的に工夫が必要で大変おもしろい。

この高周波の基礎では、比較的エネルギーの低い陽子シンクロトロンでのビーム加速を想定し、縦方向(longitudinal）ビーム運動について解説する。

2．縦方向の運動方程式ーLongitudinal Equation of Motion

2.1 座標

シンクロトロンを周回するビームの運動を調べる前にまずここで座標系の定義とその確認をおこなう。



ここで、座標 sはビームの進行方向、座標(x, y)はビームの進行方向に対して、水平、垂直方向の座標を表す。又、reference orbitは、平均半径 R[m]の円軌道と考える。

2.2 荷電粒子の運動方程式

電磁場**E**、**B**の中で速度 **v** で運動する荷電粒子（電荷 e）は、

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad (2.2.1)$$

の力を受ける。

ここで、energy gain dE/dt を得るために速度と力の内積を考える。

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{v} \cdot \vec{E} \qquad (2.2.2)$$

ここで、電場$\mathbf{E_C}$は進行方向（longitudinal又は縦方向）の電場と磁場の時間変化による起電力場$\mathbf{E_B}$の和で表される。

$$\vec{E} = E_C + E_B$$

Electromotive force $\mathbf{E_B}$は、Maxwellの式から

$$rot\vec{E}_B = -\partial\vec{B}/dt \qquad (2.2.3)$$

で計算できる。

2.3 高周波電場 E_c

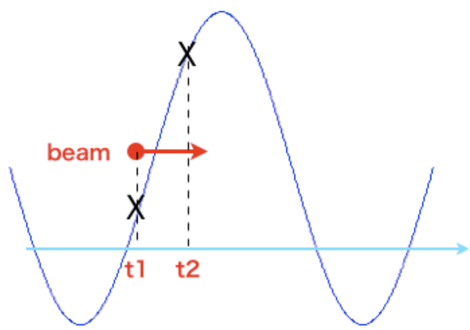
ここで、荷電粒子（ここでは主に陽子: p)の加速ギャップを通過する時を考える。ギャップ電圧V[volt]、ギャップ間距離g(m)とする。

$$V(t) = V_O \cdot sin(\omega t) \qquad (2.3.1)$$

進行方向の電場Ecが均一であるとすると、粒子が加速ギャップを通過する時に得るエネルギーΔE(eV)は、

$$\Delta E = \frac{eV_O}{g} \int_{-g/2}^{g/2} sin(\omega t) ds \qquad (2.3.2)$$

ここで、sはリング進行方向の距離、ωは加速高周波の角周波数とする。



粒子は加速ギャップg(m)を通過するのに有限の時間Δt(=t2-t1)掛かるとする。

ωt = ωs/v + const.であるから式(2.3.2)に代入して、

$$\Delta E = eV_O \cdot sin(\omega t) \left[\frac{sin(a/2)}{a/2} \right] \qquad (2.3.3)$$

式中の a は、reference orbit の中心から加速ギャップgを見る中心角を表す。

この式(2.3.3)左辺の括弧[ ]で括った部分を**transit time factor**と呼び、ビームが加速空胴を通過する間に受ける実効的なエネルギーを示す

係数である。陽子シンクロトロンの場合、加速空胴の長さは2m程度(加速ギャップの長さではない。一般に空胴は複数の加速ギャップに構成される)、小型のKEK-PS Booster[4]の場合でも周長は40m程度であるから **transit time factor** > 0.995になり、殆どの場合、1と考えてよい。

したがって、粒子が加速ギャップを通過する時に得るエネルギーΔE(eV)は、

$$\Delta E = eV_O \cdot sin(\omega t) \qquad (2.3.4)$$

で表される。

2.4 加速周波数とハーモニック数

粒子が速さ 速度 v [m/s] で周長C[m; =2πR、Rは平均半径]のシンクロトロン（リング）を周回しているとする。周回周期 T_o [sec]、周回周波数 f_o [Hz]は、

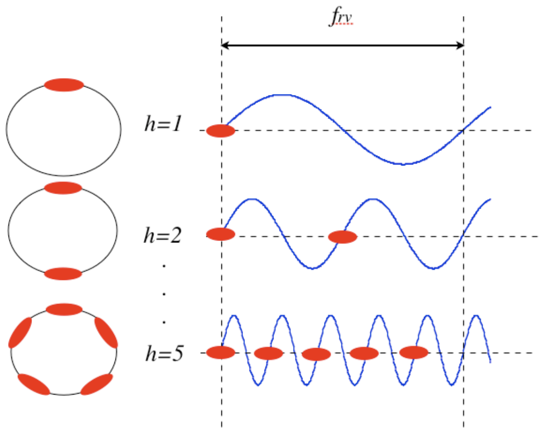
周期 $T_o = C/v = 1/f_o \qquad (2.4.1)$

であらわされる。

荷電粒子がリング上の加速空胴を通過する度に発生する高周波電圧を感じる要にすればよいから、発生させる加速電場の周波数と周回周波数の間には、整数則が生じる。

$f_{rf} = h \times f_o \qquad (2.4.2)$

この整数ｈを高周波の**ハーモニック数 (harmonics or harmonic number)**と呼ぶ。



図に示すように、高周波のハーモニック数の数だけ縦方向の運動を司る安定位相が存在する。

ビームをより高いエネルギーまで加速するためにシンクロトロンをカスケードにすることがあらゆる点で効率的である。２つのシンクロトロンでビーム受け渡しを行う場合、縦方向位相空間マッチングを考える必要がある。２つのリングの周長C、加速周波数ｆ、ハーモニックス数ｈとし、それぞれに２つのリングを区別するために添え字をつける。ビーム受け渡し時のマッチングの条件として、周波数が等しいとすると、

$\omega_{rf1} = \omega_{rf2}$

$\rightarrow h_1 \omega_{o1} = h_2 \omega_{o2}$

$\rightarrow h_1 v / C_{o1} = h_2 v / C_{o2}$

ここでビームの速度vは同じであるから、

$\rightarrow h_1 / C_{o1} = h_2 / C_{o2}$

それぞれのリングの周長比は、リングのそれぞれのハーモニック数の比に等しくする必要がある。

リングのハーモニックス数をいくらにするかは、単純ではない。ビーム利用者がどのような時間構造を持ったビームを実験をする上で望んでいるかが重要である。また、その上で、ハードウェアー（空胴、高周波源）が実現できるか。特に、100MeV以下の陽子シンクロトロンでは、速さvと高速ｃの比、β=v/c<１でエネルギーの応じて変化する。つまり、エネルギー（運動量）と共に加速周波数を変化させなければない。加速周波数可変を実現するためのハードウェアーの制限も高周波ハーモニック数の選択に影響を与えている。J-PARC陽子シンクロトロンは400MeVリニアック、3GeVシンクロトロン（RCS)、50GeVシンクロトロン（50GeVMR)で 構成される。3GeV RCSは、25Hzの速い繰り返しで運転され、MRサイクル4秒の中で約95%強のビームが3GeVビームを使った利用者に供給させる。RCSとMRの周長比は、１: 4.5であり、最終的にそれぞれのハーモニック数は、2及び9に選択された[5]。

2.5 加速に必要な電圧

荷電粒子の円形運動を司るのは偏向電磁石の磁場 B [T] とし、磁石の曲率半径ρ[m] とすると運動量 p との間に、

$p = - eB\rho \quad$ or $3.3p$ [GeV/c] $= B\rho$ [Tm]

(2.5.1)

の関係がある。ここで e は陽子加速を想定し、その素電荷とした。

また、式 (2.2.2) から

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{\beta c}\frac{dE}{dt} \qquad (2.5.2)$$

ここで、$E=\gamma m_o c^2$ は全エネルギーである、m_o 陽子の静止質量、cは光速とする。

一方、式 (2.3.4) から粒子がリングを１周する間に得るエネルギーは、$\Delta E = eV_O \cdot sin(\omega t)$ でその平均値は、

$$\frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{eV_O}{T_{rev}} \cdot sin(\omega t) \qquad (2.5.3)$$

従って、式 (2.4.1) と式 (2.5.2)から

$$V_O \cdot sin(\omega t) = 2\pi R \frac{d(B\rho)}{dt} \qquad (2.5.4)$$

磁場の時間変化に必要な加速電圧を得る。V_o は粒子がリングを一周する間に受ける最大の加速電圧 [volt/turn] である。ここで、加速電圧が、リングの大きさと磁場の時間変化の最大値の積に比例し、決まることは大変重要である。必要な加速電圧を得るために加速空胴の台数を増やそうと思ってもスペースがなくて増やせない場合がある。リングを大きくして空胴の場所確保できれば良さそうだが、そのために加速電圧がさらに必要になることを忘れてはならない。

2.6 Synchronous 粒子

前節の式 (2.5.4) から磁場の時間変化量dB/dtと最大加速電圧 V_o [volt/turn]が決まれば、

$$\phi = asin\left(\frac{2\pi R}{eV_O}\rho\frac{dB}{dt}\right) \equiv \phi_S \qquad (2.6.1)$$

式 2.6.1 で決まる高周波の位相にいる粒子は、毎回同じ位相に留まる。この位相を同期位相 synchronous phaseといい、この同期条件を満たして運動する粒子をsynchronous particle（粒子） 又は、reference particle と呼び、この粒子は常に高周波と同期している。

2.7 トランジションエネルギー：γ_t

シンクロナス粒子は加速器のデザイン通りに運動する粒子のことで、磁場の中心軌道を運動する。殆どの粒子はシンクロナス粒子の周りに異なる運動量を持って分布している。軌道を司る偏向電磁石が運動量分散を持つために、それらの軌道は中心軌道からずれる。

$$\frac{\delta C}{C} = \alpha_P \frac{dp}{p} \qquad (2.7.1)$$

式 (2.7.1)に示すように、運動量のずれと軌道の長さのずれを表す量として**momentum compaction: α_p**が導入される。

$$\alpha_P = \frac{1}{2\pi R}\int X_P(s)\,d\vartheta \qquad (2.7.2)$$

Xp(x)はラティスの分散関数、α_pは分散関数のリング一周の積分量の中心軌道に対する割合で表される。

運動量と速度 v の間には、

$p = mv = m_o\gamma\beta c$

$\delta p = m_o\beta c\delta\gamma + m_o\gamma c\,\delta\beta$

$\delta p/p = \delta\gamma/\gamma + \delta\beta/\beta = 1/\beta^2\,\delta\gamma/\gamma$

$\delta\beta/\beta = 1/\gamma^2\,\delta p/p$

なる関係があり、粒子の角速度ω_rと運動量pの間には、T=C/vを使って、

$\delta\omega/\omega_o = -\delta T_r/T_o = -\delta C/C_o + \delta v/v_o$

$$= -\left(\alpha_P - \frac{1}{\gamma^2}\right)\cdot\frac{\delta p}{p} \qquad (2.7.3)$$

を得る。ここで、括弧（）を**slippage factor**と呼び、

$$\eta = \left(\alpha_P - \frac{1}{\gamma^2}\right) \qquad (2.7.4)$$

で定義する。

Slippage factor は、ビームのエネルギーが

$$\gamma = 1\Big/\sqrt{\alpha_P} \qquad (2.7.5)$$

でゼロになる。このときのエネルギーを遷移エネルギー（**transition energy: γ_t**）と呼ぶ。

ビームは、$\gamma = \gamma_t$でサイクロトロンのように等時性が保たれてしまう。

加速領域に遷移エネルギーが存在するとビーム不安定性や加速のための位相制御のため、大強度加速器ではビーム損失が問題になる。そのため、最近の設計では、γ_tを加速域から外したり、α_pを負の値ににする（imaginary γ_t）などの工夫がされた、J-PARC大強度陽子加速器が稼働し始めた[6]。

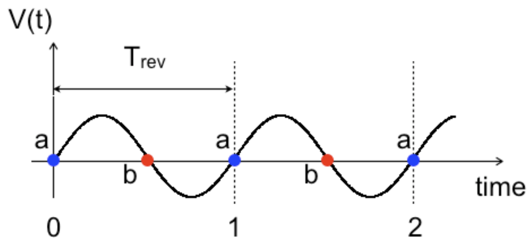
2.8 位相安定性の原理

シンクロトロンで加速される粒子は、エネルギーにばらつきが有り、加速に必要な高周波に対する位相も一定ではない、つまり、2.6 で述べたシンクロナス粒子の周りに分布している。そこで、簡単のためにエネルギー、加速周波数を一定として、シンクロナス粒子の周りに粒子の運動を考える。リング軌道上の１カ所に高周波加速空胴があり、式(2.3.1)の加速電圧V(t)

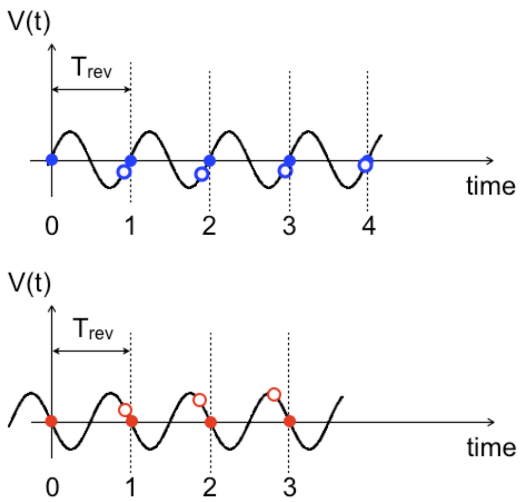
$V(t) = V_o \sin\omega t$

が発生している。

まず、磁場が一定で加速がないとき、シンクロナス粒子は、図中の a点、又はb点の高周波電圧のどちらかの zeroクロスに留まる。



そこで、シンクロナス粒子と運動量の異なる粒子の運動を次に考える。まず、図中 原点に高周波位相にある粒子の運動量がシンクロナス粒子より大きい場合を考える（下図上）。



運動量の大きい粒子は、シンクロナス粒子より先に空胴に到達するため少しずつ減速される。シンクロナス粒子の運動量と等しくなった時点でシンクロナス粒子との位相差は最大になり、今度は、周回周期がシンクロナス粒子の周期より長くなるために、その位相差は逆に縮まっていく。このようにして、シンクロナス粒子と運動量が異なる粒子は、時間的にシンクロナス粒子の周りを行ったり来たりすることになる。

もう一つの安定点（上図下段）の粒子はどうなるであろうか？今度は、運動量の大きい粒子はさらに加速電圧を感じるため、より運動量がおおきくなる。一方、運動量に小さい粒子は、周回する度により運動量が小さくなるため、シンクロナス粒子から運動量を異にする粒子は不安定な振る舞いをすることになる。図に示した高周波位相上の数学的な2つの不動点の内、1つは **stable fixed point**、もう一つが **unstable fixed point**と呼ばれる(詳細は2.12)。高周波による加速では、運動量や位相の変化が安定になる条件存在し、このことをシンクロトロンに於ける位相安定性の原理として理解されている。

2.9 シンクロトロン運動の方程式

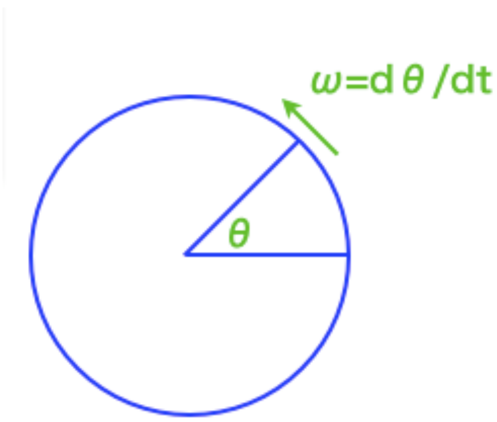
シンクロナス粒子と運動量及び加速空胴に到達したときの高周波位相が異なる粒子（非同期粒子）の運動について詳しく見る。

非同期粒子のパラメータを以下に定義する。

$\omega=\omega_o+\Delta\omega$、$p=p_o+\Delta p$、$\phi=\phi_s+\Delta\phi$

$E=E_o+\Delta E$、$\theta=\theta_o+\Delta\theta$

ここで、ω、p、E、φ、θは、それぞれ、周回角速度、運動量、エネルギー、位相、リング上の粒子の中心角（軌道角）を示し、添え字 “s” “o”は、シンクロナス粒子に値を示す。



高周波の位相φと軌道角θは、高周波のハーモニックスをhとして、

$\Delta\phi=\phi-\phi_s=-h\Delta\theta$　となる。

角速度ωは、$\omega=d\theta/dt$ なので、

$$\Delta\omega=\frac{d}{dt}\Delta\theta=-\frac{1}{h}\frac{d\phi}{dt}$$

式 (2.5.4) から$V_o\to V$として、周回あたりにビームが得るエネルギーは $eV\sin(\phi)$だから、周回周波数$f=2\pi\omega$を使って、energy gain

$$\frac{dE}{dt}=\frac{\omega}{2\pi}eV\sin(\phi) \qquad (2.9.1)$$

を得る。特に、シンクロナス粒子に対する式(2.9.1)は、

$$\frac{dE_o}{dt}=\frac{\omega_o}{2\pi}eV\sin(\phi_S)$$ だから、

$$\frac{dE}{\omega dt}-\frac{dE_o}{\omega_O dt}=\frac{1}{\omega_O}\frac{d}{dt}\Delta E-\frac{dE}{dt}\frac{\Delta\omega}{\omega_O^2}\approx\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta E}{\omega_O}\right)$$

したがって、シンクロナス粒子と運動量の異なる粒子に対して、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta E}{\omega_O}\right)=\frac{1}{2\pi}eV\left(sin(\phi)-sin(\phi_S)\right) \quad (2.9.2)$$

を得る。

一方、位相角ϕの時間変化は、

$$\frac{d\phi}{dt}=-h\Delta\omega \quad (2.9.3)$$

$\omega=\beta c/R$から

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_O}=\frac{\omega-\omega_O}{\omega_O}=\frac{\omega}{\omega_O}-1=\frac{\beta R_O}{\beta_O R}-1$$

運動量のずれと周長の関係からmomentum compactionを使って、

$R=R_O(1+\alpha_P\frac{dp}{p_O})$ を代入すると、式 (2.7.3)

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_O}=-(\alpha_P-\frac{1}{\gamma_O^2})\frac{\Delta p}{p_O}=-\eta\frac{\Delta p}{p_O}$$ を得る。

(2.9.3)と (2.7.3)から位相に関して、

$$\frac{d\phi}{dt}=\eta h\omega_O\frac{\Delta p}{p_O}=\eta\frac{h\omega_O^2}{\beta^2 E}\left(\frac{\Delta E}{\omega_O}\right) \quad (2.9.4)$$

の方程式を得る。

変数(ϕ、$\Delta E/\omega_o$)はシンクロトロン運動を表す位相空間の変数であり、式(2.9.2)と(2.9.4)は、シンクロトロン運動を表す方程式であり、非同期粒子の位相とエネルギーが、同期位相と中心エネルギーの周りを振動する運動（**シンクロトロン振動**）を示している。

2.10 Small amplitude synchrotron oscillation

シンクロトロン運動の方程式に於いて、パラメータが時間的に大きく変化せず、位相振動の振幅が小さい場合、$\sin(\phi) - \sin(\phi_s)\sim\cos(\phi_s)\Delta\phi$、さらに、

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{d(\phi_S+\Delta\phi)}{dt}\approx\frac{d(\Delta\phi)}{dt}$$

を使って、式(2.9.4)を式(2.9.2)に代入すると、$\Delta\phi$についての振動の微分方程式を得る。

$$\frac{d^2(\Delta\phi)}{dt^2}-\frac{heV\Omega_O^2\eta\cos(\phi_S)}{2\pi E_O}(\Delta\phi)=0 \quad (2.10.1)$$

ここで$\Omega_o=c/R=\omega_o/\beta_o$は、速度v=c（高速)の時の角振動数を表す。

式(2.10.1)より、シンクロトロン振動の安定条件:

$$\eta\cos(\phi_S)<0$$

がMcMillanとVekslerにより示された[7]。

ビームのエネルギーがトランジションエネルギーγ_tより低い又は高い場合で安定位相の条件が変化する。

$\gamma<\gamma_t\rightarrow\quad 0<\phi_s<\pi/2$

$\gamma>\gamma_t\rightarrow\quad \pi/2<\phi_s<\pi$

この方程式の振動数、

$$\Omega_S=\Omega_O\sqrt{\frac{heV|\eta\cos(\phi_S)|}{2\pi E_O}}$$

を**シンクロトロン振動数**と呼び、Ω_sをΩ_oで除した量を **synchrotron tune**: Q_sと呼ぶ。

$$Q_S=\frac{\Omega_S}{\Omega_O}=\sqrt{\frac{heV|\eta\cos(\phi_S)|}{2\pi E_O}}$$

以下に、J-PARCを構成する2つのシンクロトロンについて、典型的な運転状態でのシンクロトロン運動の振動数を計算する。

J-PARC parameters

RCS:

Harmonic number: h=2

Ω_o=c/R=5.4 [1/ms]

-	Injection	extraction
Energy	181MeV	3GeV
η	-0.69	-0.045
ϕ_s	0	0
V (kV)	60 kV	150 kV
Ω_s	2π x 3 kHz	2π x 630 Hz
Q_s	0.0063	0.00076

MR:

Harmonic number: h=9

Ω_o=c/R=1.2 [1/ms]

-	Injection	Extraction
Energy	3GeV	50GeV
η	-0.058	-0.0013
ϕ_s	0	0
V (kV)	280 kV	280 kV
Ω_s	2π x 460 Hz	2π x 20 Hz
Q_s	0.0025	0.0001

J-PARCの例でも分かるように、シンクロトロンチューンは10^{-3}程度である、これは、粒子が１シンクロトロン振動するのに1000ターンほど掛かることを意味している。

2.11 Hamiltonian

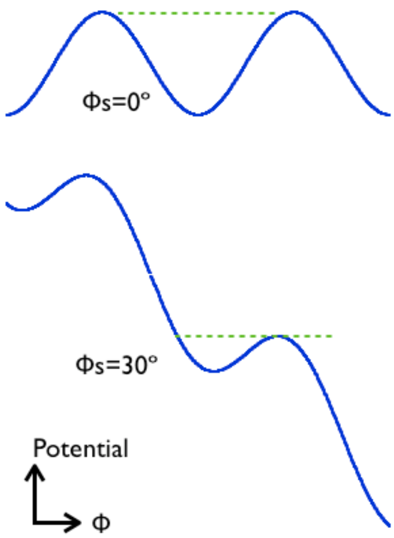
正準変数にϕ、w（＝ΔE/ω_o）を選び、Hamiltonian: H(ϕ、w）を考える。

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{\partial H(\phi,w)}{\partial w} \\ \dfrac{dw}{dt} = -\dfrac{\partial H(\phi,w)}{\partial \phi} \end{cases}$$

式(2.9.2)と式(2.9.4)から、シンクロトロン振動のHamiltonianは、

$$H(\phi, w) = \frac{1}{2}\frac{h\eta\Omega_O^2}{E_S}w^2 + \frac{eV}{2\pi}\left(\cos(\phi) + \phi\, sin(\phi_S)\right) \qquad (2.11.1)$$

で表わすことができる。



高周波電圧 eV sin(ϕ)が作るpotential 及びシンクロトロン振動の軌跡trajectoryを考える。式(2.11.1)の右辺第２項が高周波位相ϕに対するpotentialを表し、典型的な同期位相（Φ_s=0と30°）に対して計算すると下の図のようになる。図の縦軸はpotential energyであるので、緑の点線と青のpotential曲線に囲まれた**bucket**形状の領域が安定領域になっていることが理解できよう。

2.12 Separatrix

高周波のパラメータである電圧:V や同期位相: ϕ_sが小さいとき、ビームが周回あたりに得るエネルギーは小さくなり、slippage factor: η の変化も小さい。このような条件では、シンクロトロン振動のHamiltonianも時間依存性が小さく、断熱的な運動として考えられる。

$$adiabaticity = \frac{1}{\omega_S^2}\frac{d\omega_S}{dt} = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{dT_S}{dt}\right| \ll 1$$

ハミルトニアンの時間依存性が小さいとして、シンクロトロン振動をもう少し詳しく見ていく。式(2.11.1)をさらに書きたすと、

$$H = \frac{1}{2}\frac{h\eta\Omega_O^2}{E_S}w^2 + \frac{eV}{2\pi}\left(\cos(\phi) - \cos(\phi_S) + (\phi - \phi_S)\, sin(\phi_S)\right) \qquad (2.12.1)$$

を得る。

このハミルトニアンは、位相空間内に２つの不動点（ϕ_s, 0）、($\pi-\phi_s$、0）を持つ。

（ϕ_s、０）は、**stable fixed point**といい、粒子のこの周りの軌跡からelliptical fixed pointとも呼ばれる。もう一つの不動点 ($\pi-\phi_s$、0）は、unstable fixed pointであり、この周りの軌跡が双曲線になることから hyperbolic fixed pointと呼ばれる。また、**unstable fixed point**を通る軌跡を **Separatrix**と呼び、位相空間に於ける安定領域の境界を表す。安定領域内の粒子は、stable fixed pointの周りをシンクロトロン運動し、**bunch**と呼ぶ集団を形成する。

$$H_{SP} = \frac{eV}{2\pi}\Gamma(\phi_S) \qquad (2.12.2)$$

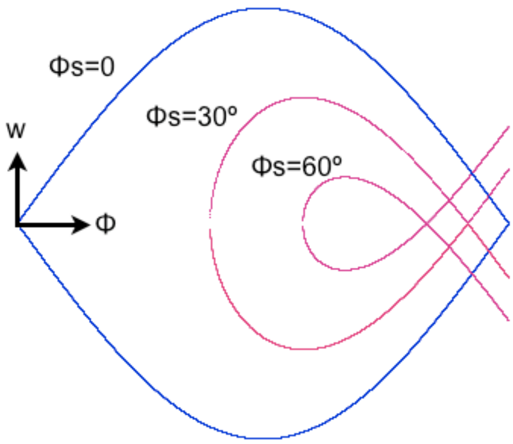
ここで、$\Gamma(\phi_S) = -2\cos(\phi_S) + (\pi - 2\phi_S)\, sin(\phi_S)$ とした。

Separatrixの軌道はH=H_{sp}であるから、式(2.12.1)と(2.12.2)から

$$w^2 = \frac{eVE_S}{\eta h\pi\Omega_O^2}\left(-\cos(\phi) - \cos(\phi_S) + (\pi - \phi_S - \phi)\, sin(\phi_S)\right)$$

を得る。

下の図に、Φ_s=0、30°、 60° の時の規格化したSeparatrixを描く。



Separatrixは、２つのzeroクロス点を位相上 $-\pi \leq \phi \leq \pi$ に有する。１つは先に述べた unstable fixed point (π-ϕ_s、0）、もう一つは ϕ_uとして、

$$\cos(\phi_U)+\phi_U sin(\phi_S)=-\cos(\phi_S)+(\pi-\phi_S)sin(\phi_S)$$

を満たす（ϕ_u、0）ある。

上の図からも分かるように、ϕ_sの増加と共に、Separatrixの高さ、幅ともに大きく減少する。ここで、
Bucket length: $|\pi - \phi_s - \phi_u|$
Bucket height:

$$w_h = \sqrt{\frac{-eVE_S}{|\eta| h\pi\Omega_O^2}\Gamma(\phi_S)}$$

になる。

J-PARCのように多段のシンクロトロンでビームを高いエネルギーまで加速する場合、2つの加速器で縦方向のマッチングをとることが重要になる。一般に、シンクロトロンAからシンクロトロンBにビームを受け渡す場合、シンクロトロンAの取り出し周波数とシンクロトロンBの入射周波数は同じに選ばれる、そのためマッチングのためには、Φ_s=0でのbucket heightが2つのシンクロトロンで同じになるように、

$$V\big/|\eta|h = const.$$

パラメータが選ばれる。

（J-PARCの場合）

	RCS	MR
Energy (GeV):	3	3
Harmonics: h	2	9
Slippage: η	-0.045	-0.058
$\|h\ \eta\|$	0.09	0.52
電圧比(V_{MR}/V_{RCS})	1	6

加速高周波が基本波だけの場合、マッチングのためにMRの待ち受け電圧とRCS取り出し電圧の比は６倍程度に設定する必要がある。

3．RF gymnastics

シンクロトロンでより大強度のビームを加速するためには、ビームの蓄積技術、空間電荷効果を抑制、ビームエミッタンスの制御が必要になる。また、加速されたビームを取り出すための前準備として、実験に適したビームを得るための時間構造や運動量のコントロール、さらにビームを加速するために行われる加速期間のmatching操作など、様々な RF gymnastics が考えられている。

3.1 Single bunch manipulations

空間電荷効果の緩和、不安定性の回避のための縦方向（Longitudinal）位相空間でのビームエミッタンス制御、(1) emittance blow-up、 (2) bunch lengthening 、取り出しビームの波形成形のための (3) bunch compression, (4) bunch rotation, (5) debunching が挙げられる。

3.1.1 Emittance blow-upとlengthening

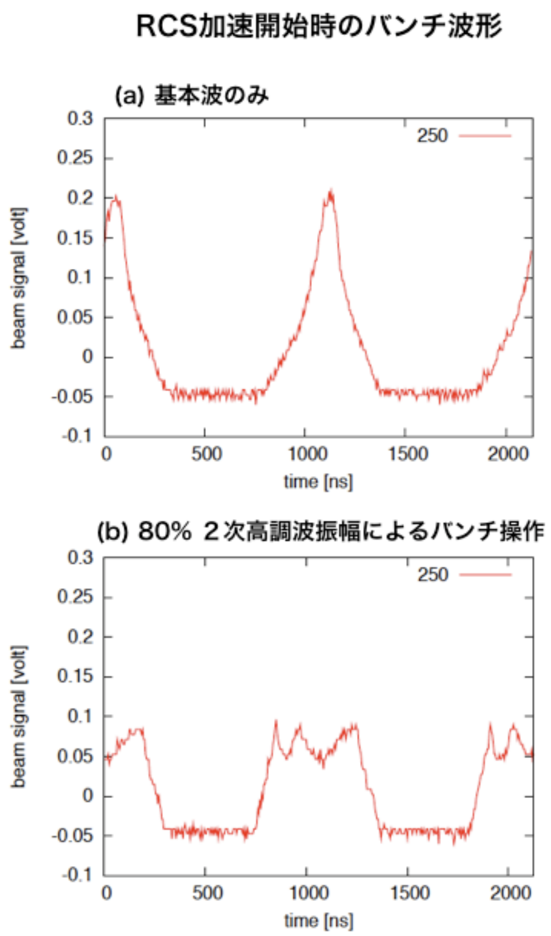
J-PARC RCSやMRシンクロトロンなど、エネルギーが比較的低い陽子シンクロトロンでは、空間電荷効果によるビーム強度が制限される。それは、空間電荷によりpotential well distortionが起こり、また、coherent /incoherent betatron tune shiftやtransverse/longitudinal collective instabilityの閾値を下げている。そのため、 空間電荷効果の緩和、ビーム不安定性の回避のために、transverse方向のだけでなく、longitudinal方向のemittanceを大きくし、ピーク電流を下げることが不可欠である。

ビーム強度の閾値を挙げるには 2次高調波加速システムなどの高調波システムが有効である。これらは、ビーム加速には直接寄与しないが、シンクロトロンチューンを広げたり、longitudinal potentialを平らにすることができる。

Bunching factor

$$B_f = \frac{peak\ current}{average\ current}$$

を大きくすることができ、incoherent space-charge tune shiftを下げることに繋がる。



図は、J-PARC RCSで行った、入射時の空間電荷効果緩和のために行った２次高調波を使ったバンチ形成の例である。J-PARC RCSは将来1MWの大強度ビーム加速を目指しているが、そのためには、入射エネルギーの低い、加速開始付近の空間電荷効果の抑制が鍵になっている。上図のビーム実験では、粒子シュミレーションを元に考えた2次高調波システムを導入した RF gymnastics が、シュミレーションの通りにビームの bunching factorを操作することを示した[9]。

3.1.2 De-bunching

高周波電圧をnon-adiabaticに切った場合、粒子はslippage factorに応じてドリフトし、終いには連続ビーム(coasting beam)となって、リング上に満たされる。シンクロトロン放射が無視できる場合、粒子の運動量はdebunching課程で変化しない。

Debunching time: T_d は、粒子の最大運動量δ_mとして、

$$T_d = \frac{2\pi}{\eta h \omega_0 \delta_m}$$

で定義する。

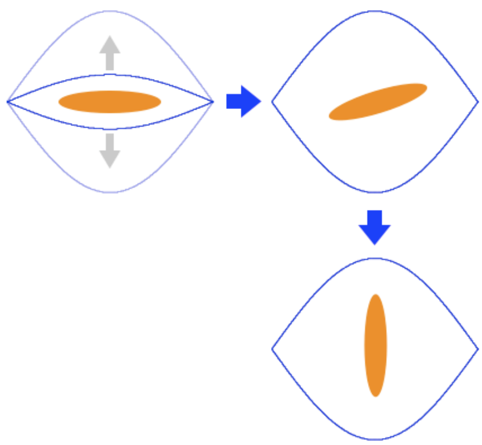
ビーム壁電流モニターは、周回するバンチビームを観測するのに用いられる。このモニターを用いて、バンチしたビームがdebunchする過程を観察し、debunching time: T_dを測定することで、ビームの運動量広がりを観測することができる。

3.1.3 Bunch rotation and compression

高周波電圧をnon-adiabaticに上げた場合、位相空間内のバンチは4極振動を始める。

そのようすを模式的に示したのが上図である。

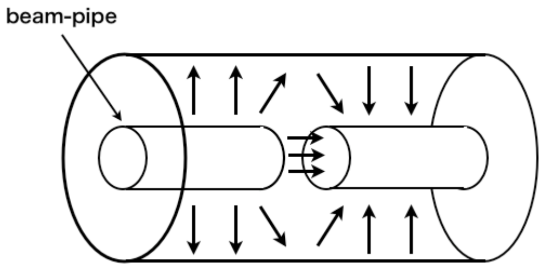
J-PARC RCSは、50GeVシンクロトロンと中性子利用施設のそのビーム供給を行う。MRビームは、空間電荷効果抑制の観点からバンチ長の長いビームが求められ、一方で、中性子利用施設のミューオングループは時間構造の短い単バンチ長ビームが実験上必要とされているため、RCS



取り出しでは、ここで示したようなbunch rotationの操作が有効になっている。

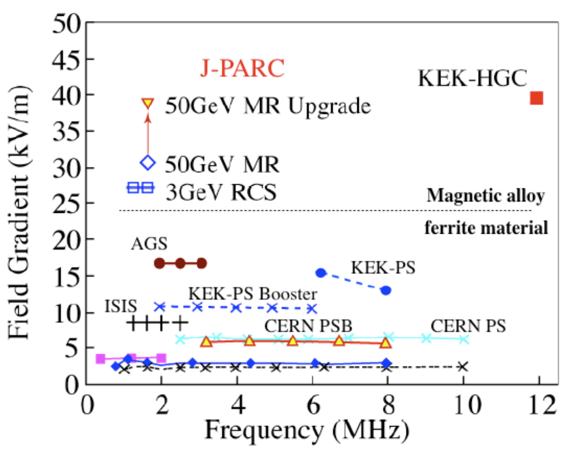
4. RF システム

シンクロトロンの高周波加速電場は、粒子の周回周期の同期しなければならない。共振型の空胴が使われる。陽子シンクロトロンでは、周波数が低く、同軸型空胴が一般的である。加速周波数



magnetic material loaded coaxial cavity

が10MHzまでの同調型空胴にはこれまでフェライト磁性体を装荷したものが使われてきた。しかしながら、近年、加速器の大強度化、小型化に伴い、高電場勾配加速空胴が求めら、新しい磁性材料を使った空胴の開発が求められてきた。金属磁性体 (Magnetic alloy)を使った高電場勾配加速空胴は、大強度陽子加速器施設 J-PARC実現に向けて、開発され、実用化した新しいタイプの高電場勾配加速空胴である。下のグラフは、様々な陽子シンクロトロン施設で稼働している（稼働していた）高周波加速空胴の動作帯域と電場勾配を示した。



フェライト磁性体を使った空胴は、飽和磁束密度、磁気余効効果などの磁気特性のために電場勾配は20kV/m以下に制限されている。J-PARCで求められる20kV/m以上の電場勾配を得るには、金属磁性体(Magnetic alloy) を使ったシステムが必要であることが言える[10]。

4.1 MA loaded Cavity

金属磁性体（Magnetic Alloy: MA）の高電場勾配加速空胴への応用開発は、1990年代半ばJ-PARCの前進である大型ハドロン計画の実現へ向けた研究開発が開始した頃に始まった。当時は陽子シンクロトロンの高周波加速装置はフェライト磁性体を装荷した空胴が主流であったが、これまでにない大強度陽子シンクロトロンの実現のためには２倍以上の加速電場勾配が可能なシステムが必要であった。

動作周波数がMHz帯の磁性体装荷型空胴は、電力の殆どが磁性体で損失する。空胴の shunt 抵抗 R_{sh} は、空胴のQ値とインダクタンス L_p から

$$R_{sh} = \omega_{rf} L_P Q \qquad (4.1.1)$$

になる。ここで、L_p は空胴インピーダンスの等価回路をLCR並列回路で表したときの並列インダクタンスを表す。
空胴のインダクタンスは、透磁率の大きい磁性体の体積で決まるからその複素透磁率: $\mu_r = \mu' - j\mu''$、磁性体の幾何学寸法：内径 a[m]、外径 b [m]、長さ l_F [m]として、
磁性体のインダクタンス L

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} l_F \, ln\left(\frac{b}{a}\right) = 2\times 10^{-7} \mu_r l_F \, ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

を使って、

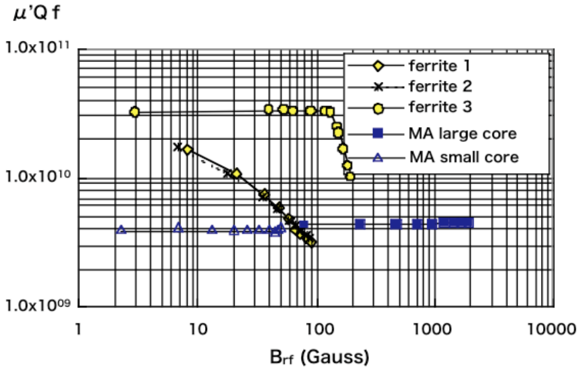
$$R_{sh} = \omega_{rf} L \left(Q + \frac{1}{Q}\right) \propto \omega_{rf} \mu' \left(Q + \frac{1}{Q}\right) \qquad (4.1.2)$$

ここで、ω_{rf} は、加速周波数である。

空胴のQ値は、磁性体の複素透磁率の比 Q＝μ'/μ'' で決まる。フェライト磁性体のQ値は、数10〜100程度であるのに対して、金属磁性体は、0.5〜1 で小さい。しかしながら、式(4.1.1)で分かるように、損失を決める shunt 抵抗は、L (Q+1/Q)の積で決まるため、L が大きい金属磁性体は、十分に高い shunt 抵抗を得ることができる。
空胴に発生する加速電圧は、coaxtial 空胴に装荷した磁性体を貫く磁束密度 B_{rf} の時間変化で得られる。coaxial構造を持つ磁性体は、トロイダル形状であり、磁束密度は 1/r の依存性を持つ。

$$V_{RF} = \omega_{rf} l_F \int_a^b B(r) dr_1$$
$$= \omega_{rf} l_F B_a r_a ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (4.1.3)$$
$$\approx \omega_{rf} B_a A$$

ここで、添え字 “a”は、平均値を示す、また、A は磁束が貫く面に垂直な磁性体の断面積である。



図は、典型的な加速器に使われるフェライト磁性体と金属磁性体の shunt 抵抗と高周波磁束密度B_{rf}に対する関係を示した。式(4.1.3)から磁束密度は加速電圧に比例することから図の横軸は電圧に比例する。金属磁性体は、高い高周波電圧に対しても、そのインピーダンスに低下は見られない。高電場勾配の加速空胴に利用できることが分かる。金属磁性体のこの性質は飽和磁束密度が高いためと考えられているが、その他に、高電場勾配を実現する加速器への応用では、キューリ温度560°高く、磁歪の小さい金属磁性体が使われる。金属磁性体は、非晶質の磁性体リボン（厚み18ミクロン）にシリカによる絶縁被膜されたものを巻いて製造される。そのためコアの大きさに制限はなく、いろいろな分野で期待されている。金属磁性体コアは、ハンドリングや冷却のための防錆のため、エポキシ樹脂を使った含浸、コーティングの工程をへて実用される。コア自身のQ値は、Q=0,5程度であるが、カットコアとして利用することで、実効的なQ値を変える事が可能である。これは、磁性体コアのカットにより周方向の磁気抵抗をコントロールし、shunt抵抗を変えることなく、インダクタンス L を可変できる性質を使っている。現在、J-PARC RCS 及びMR 2つのシンクロトロンの加速空胴に高電場勾配を実現した実用機として世界で初めての運用が開始した[11]。

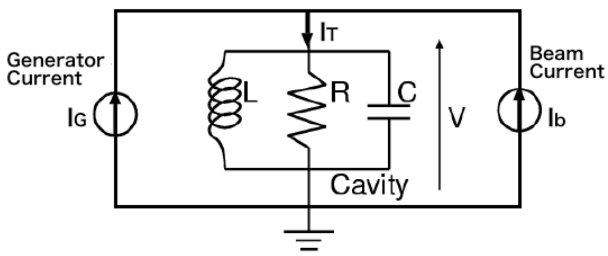
最近では、磁性体リボンの厚み調整や磁場雰囲気での熱処理により、これまで以上に高いshunt抵抗が得られることが分かってきた。これによりさらに高い電場勾配を実現できる可能性が出てきた。

金属磁性体の利用には技術的な課題がいくつか存在するが、将来のMWクラスの加速実現に不可欠な加速器材料になっている。そして、J-PARCでは50GeVシンクロトロンのビーム増強、高繰り返し化に向け、それに対応できる加速空胴に研究が進められている[12]。

5. ビームローディング

ビーム電流が高周波空胴を通過するとwakefieldを誘起する。高周波加速ギャップに発生する電圧は、加速電圧を発生するためのgenerator current とbeam currentの合成電圧になる。

$$\vec{I}_T = \vec{I}_G + \vec{I}_b$$



空胴に誘起した電圧が蓄積されるエネルギーを $W = aV^2$ を仮定する。ここで、aは任意である。ビームが空胴に誘起する電圧V_bとし、ビームに影響を与える電圧 $V_e = bV_b$ とする。ここで、bは任意の数、0 < b < 1である。

２つのビームが位相角θで空胴を通過するとき、それぞれが誘起する電圧を $\vec{V}_{b1},\vec{V}_{b2}$ とする。$\vec{V}_{b1},\vec{V}_{b2}$ は、大きさが等しく、位相角θで誘起されるから２つビームにより空胴に蓄えられるエネルギーは、

$$W = a\left|\vec{V}_{b1} + \vec{V}_{b2}\right|^2 = a\left(2V_b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2$$
$$= 2aV_b^2\left(1+\cos(\theta)\right)$$

である。一方、それぞれの粒子のenergy損失は、粒子の電荷をqとして、

$$\Delta U = qV_e + qV_e \cos(\theta)$$

を得る。エネルギーの保存から$W = \Delta U$ 、

$$V_e = \frac{1}{2} V_b$$

つまり、周回ビームは、誘起した電圧の正確に1/2の電圧を見る。
これは、加速器のビームローディングを考える上で重要な考えになっている。[13]

5.1 Shunt Impedanceとloaded Q_L

加速空胴に発生する電圧Vと損失電力P_o、Shunt Impedance R_{sh}の間には、

$$R_{sh} = \frac{V^2}{2P_O}$$

の関係がある。
Q値は、蓄積された電力と損失の比で定義される。周波数ω、蓄積エネルギーW_sとのあいだに

$$Q = \frac{P_{stored}}{P_O} = \frac{\omega W_S}{P_O}$$

の関係がある。
エネルギーの保存から

$$\frac{dW_S}{dt} = -P_O = -\frac{\omega W_S}{Q}$$

つまり、
蓄積エネルギーWs は、

$$W_S = W_{S0} e^{-\omega t / Q}$$

で時間的に変化する。

ここで、 **filling time** $T = \dfrac{2Q}{\omega}$ を定義する。

5.2 ビームローディング補償

加速空胴に加速電圧を発生させるために必要で generator current: I_oは、

$$\tilde{I}_O = I_O e^{j\theta}$$

加速電圧　$V_{acc} = V_g \cos\theta = V_g \sin\phi_s$
の関係を持つ。ここで、$V_g = I_o R_{sh}$.

周期的に空胴を通過するビームの作るimage current I_bは、Fourier展開により、bunch長が短いとき、直流成分 I_{dc}の2倍の振幅を持つ。ビームが空胴に誘起する電圧 $V = I_b R_{sh}$ は安定な加速に必要な同期位相Φ_sをbeam loadingにより変化させてします。[14][15]

そのため、加速に必要な振幅と位相を得るために detuning angleとgenerator currentの調整が必要になる。

ビームが無いときのgenerator current:

$$\tilde{I}_O = I_O e^{j\theta}$$

ビームが有るときのgenerator current:

$$\tilde{I}_g = I_g e^{j(\theta+\theta_g)}$$

ビームのimage電流の高周波成分：

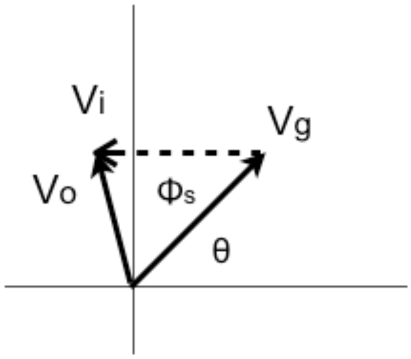
$$\tilde{I}_i = -I_i = -I_b$$

Required rf accelerating voltage:

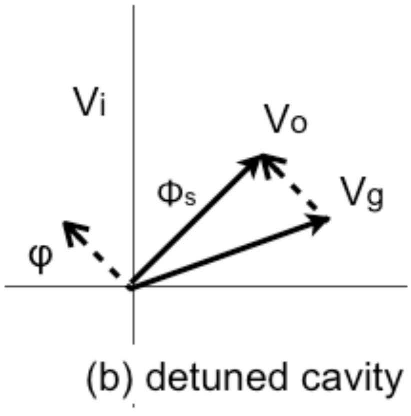
$$\tilde{V}_g = V_g e^{j\theta}$$

Detuning angle:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2Q(\omega - \omega_r)}{\omega_r}$$



(a) φ＝0



(b) detuned cavity

そして、loading factor:
Y=image current/generator currentで定義する。

加速電圧Vgは、

$$\tilde{V}_g = I_o R_{sh} e^{j\theta} = \left(I_g e^{j(\theta+\theta_g)} - I_1 \right) R_{sh} \cos\varphi\, e^{-j\varphi}$$

で書き表される。両辺を複素展開し、実数部と虚数部を比較すると、

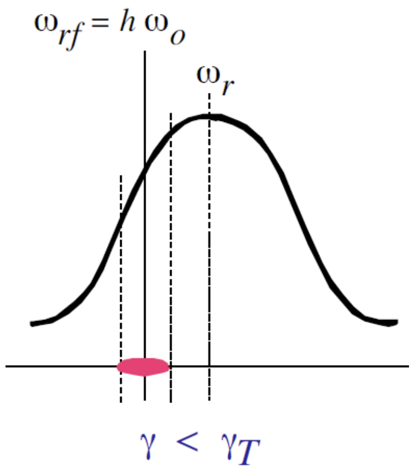
$$\tan\left(\theta_g\right) = \frac{\tan(\varphi) - Y\sin(\theta)}{1 + Y\cos(\theta)}$$

$$I_g = I_o \frac{1 + Y\cos\theta}{\cos\theta_g}$$

ビームローディング補償のための、detuningの条件を得る。

5.3 Robinson's dipole mode instability

ビーム周回周波数ω_oとし、加速高周波ハーモニック数をｈとする。



$\frac{\Delta\omega}{\omega_O} = -\eta \frac{\Delta E}{\beta^2 E_O}$ 周回周波数とエネルギー広がりの関係からビームのエネルギー$\gamma < \gamma_t$とき、 空胴の共振周波数ω_rが加速周波数 $h\omega_o$より高いければ、 ω_oより高い周波数でビームは周回するために空胴により高いwakefield を誘起して、エネルギーをより損失する。つまり、dipole振動は空胴インピーダンスのinductive partにより、減衰方向に働く。他方、この条件で空胴の共振周波数が $\omega_r < h\omega_o$の時、ビームはcapacitive な空胴インピーダンスのために、dipole振動はさらにその振幅を大きくして、結果的に不安定になる。以上をRobinsonの安定条件または、Robinson 不安定性と呼ぶ[16]。

参考文献

[1] S. Y. Lee, Accelerator Physics, 2nd.edition

[2] CERN Accelerator School Advanced Accelerator Physics, CERN 87-03, 21 April 1987

[3] 亀井亨、木原元央「加速器科学」パリティー物理学コース

[4] M. Kihara et.al., Proc. of the international Workshop on Hadron Facility Technology, KEK Preprint 86-107

[5] TDR, J-PARC, JAERI-Tech 2003-044, KEK Report 2003-13

[6] S. Machida, et al., "Lattice Design of JHF Synchrotrons", APAC98, 1998, KEK

[7] E. M. McMillan, Phys. Rev., 68, 143 (1945); V. I. Veksler, Compt. Rend. Acad. Sci. U.S.S.R., 43, 329 (1944); 44, 365(1944)

[8] E. D. Courant, H. Snyder, Theory of the Alternating Gradient Synchrotron, Ann. Phys. 3,1(1958)

[9] F. Tamura et al., "Longitudinal painting with large amplitude second harmonic rf voltages in the rapid cycling synchrotron of the Japan Proton Accelerator Research Complex", Phys. Rev.ST

[10] Y. Mori, et al.,"A New Type of RF Cavity for High Intensity Proton Synchrotron using High Permeability Magnetic Alloy" Proc. of EPAC98, page 299-301, 1998

[11] M.Yoshii, "Present status of J-PARC ring RF systems", Proc. of PAC07 (2007)

[12] C. Ohmori, "DESIGN OF A NEW J-PARC RF CAVITY FOR SHORT MUON BUNCH", Proc. of PAC09, 2009

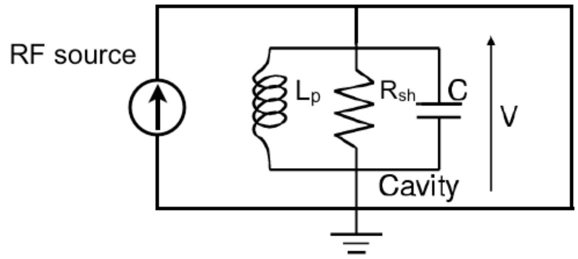
[13] P.B. Wilson, AIP Conf. Proc. 87, 452 (1981)

[14] J.E.Griffin, AIP Conf. Proc. 87, 564 (1981)

[15] F. Pederson, IEEE trans. NS-32, 2138 (1985)

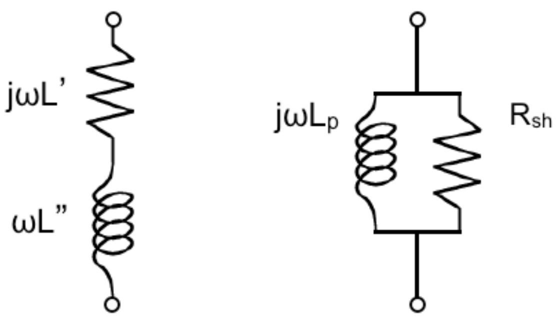
[16] K.W.Robinson, 'Robinson Instability" SLAC=49, p.32 (1965)

付録：空胴の等価回路



加速空胴の等価回路を上に示す。空胴の複素インダクタンスは、磁性体の複素透磁率、
$\mu = \mu' - j\mu''$に比例することから、
$L = L' - jL''$
と同様に表記できる。
インダクタンスの角周波数ωに対するインピーダンスは、
$j\omega L = j\omega L' + \omega L''$
になり、実部と虚部の成分を持つ。

磁性体インピーダンス



(a) 直列表記　　(b) 並列表記

これは上記(a)に示すように磁性体インピーダンスを直列表記した回路と等価でになる。そこで、磁性体インピーダンスを上記(b)のように並列表記した場合の変換を考える。
並列表記のインピーダンスは、

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{j\omega L_p} + \frac{1}{R_{sh}} = \frac{1}{\omega L'' + j\omega L'}$$

にであるから実数部と虚数部を比較し、また、Qの定義式　Q＝L'/L"　を使うと、

$$L_P = \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)L'$$

$$R_{sh} = \omega L_p Q$$

式(4.2.1) を得る。